

الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ٧٥ دقيقة	عدد المسائل: ثلاث
ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات. - يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).		

I- (6 points)

The table below shows, in each year from 2016 till 2021, the number of hybrid vehicles sold y_i (in thousands) corresponding to the rank x_i of the year.

Year	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rank: x_i	1	2	3	4	5	6
Number of hybrid vehicles sold (in thousands): y_i	18	32	65	84	105	123

All values are rounded to the nearest 10^{-3} .

The plane is referred to an orthogonal system.

- 1) Write an equation of the regression line ($D_{y/x}$) of y in terms of x .
- 2) Calculate the coordinates $\bar{x}$ and $\bar{y}$ of the center of gravity G of the data points (x_i, y_i) .
- 3) Determine the correlation coefficient r and interpret the result obtained.
- 4) Suppose that the preceding model remains valid till the year 2022.
 - a) Estimate the number of hybrid vehicles sold in 2022.
 - b) In reality, from the year 2021 to the year 2022, the number of hybrid vehicles sold increased by 15 %.

Calculate the percentage relative error of the number of hybrid vehicles sold in 2022.

II- (4 points)

In the following table, only one of the proposed answers to each question is correct.

Write the number of each question and give, with justification, the answer that corresponds to it.

N°	Questions	Proposed answers		
		a	b	c
1	The domain of definition of the function f given by $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$ is	$[0, +\infty[$	$[e, +\infty[$	$]0, e[\cup]e, +\infty[$
2	The derivative of the function f defined over $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ as $f(x) = \ln(2x - 1) - \ln(2x + 1)$ is	$\frac{4}{4x^2 - 1}$	$\frac{2}{4x^2 - 1}$	$\frac{2}{\ln(2x - 1)} - \frac{2}{\ln(2x + 1)}$
3	The solution of the equation $\ln(x + e) = 1$ is	0	1	$1 - e$
4	The set of solutions of the inequality $e^{x+4} > 1$ is	$] -4, +\infty[$	$] -\infty, -4[$	$[-4, +\infty[$

III- (10 points)

Part A

Consider the function g defined over $]-\infty, +\infty[$ as $g(x) = 1 + (-x + 1)e^{-x+1}$.

- 1) Knowing that $g'(x) = (x - 2)e^{-x+1}$, set up the table of variations of g .
(The limits of g at $-\infty$ and at $+\infty$ are not required).
- 2) Verify that $g(x) \geq 1 - e^{-1}$ for all real numbers x .

Part B

Consider the function f defined over $]-\infty, +\infty[$ as $f(x) = x + 2 + xe^{-x+1}$.

Denote by (C) the representative curve of the function f in an orthonormal system $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Let (d) be the line with equation $y = x + 2$.

- 1) Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Calculate $f(-1)$ and $f(1)$.
- 2) a) Show that $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
b) Study, according to the values of x , the relative position of (C) with respect to (d).
c) Show that the line (d) is an asymptote to (C) at $+\infty$.
- 3) a) Verify that $f'(x) = g(x)$. Deduce that f is strictly increasing over $]-\infty, +\infty[$.
b) Set up the table of variations of f .
- 4) Draw (d) and (C).
- 5) Consider the line (D) with equation $y = x + m$, where m is a real parameter.

Determine the value of m for which (D) is tangent to (C).

- 6) The table below is the table of variations of a function k defined over $]-\infty, +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$k'(x)$		0	
$k(x)$	$-\infty$	e^{-2}	0

Find the domain of definition of the function h given by $h(x) = \frac{1}{k(x) - g(x)}$.

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (6 points)

Le tableau ci-dessous représente, dans chaque année de 2016 jusqu'à 2021, le nombre de véhicules hybrides vendus y_i (en milliers) correspondant au rang x_i de l'année.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de véhicules hybrides vendus (en milliers) : y_i	18	32	65	84	105	123

Toutes les valeurs seront arrondies à 10^{-3} près.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

- 1) Ecrire une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) de y en fonction de x .
 - 2) Calculer les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ du point moyen G des couples $(x_i ; y_i)$.
 - 3) Déterminer le coefficient de corrélation r et interpréter le résultat obtenu.
 - 4) On suppose que le modèle précédent reste valable jusqu'à l'année 2022.
 - a) Estimer le nombre de véhicules hybrides vendus en 2022.
 - b) En réalité, de l'année 2021 à l'année 2022, le nombre de véhicules hybrides vendus a augmenté de 15 %.
- Calculer le pourcentage d'erreur relative du nombre de véhicules hybrides vendus en 2022.

II- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses proposées		
		a	b	c
1	Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$ est	$[0 ; +\infty[$	$[e ; +\infty[$	$]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$
2	La dérivée de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x - 1) - \ln(2x + 1)$ est	$\frac{4}{4x^2 - 1}$	$\frac{2}{4x^2 - 1}$	$\frac{2}{\ln(2x - 1)} - \frac{2}{\ln(2x + 1)}$
3	La solution de l'équation $\ln(x + e) = 1$ est	0	1	$1 - e$
4	L'ensemble de solutions de l'inéquation $e^{x+4} > 1$ est	$] - 4 ; +\infty[$	$] - \infty ; - 4[$	$[- 4 ; +\infty[$

III- (10 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $g(x) = 1 + (-x + 1)e^{-x+1}$.

1) On sait que $g'(x) = (x - 2)e^{-x+1}$. Dresser le tableau de variations de g .

(On ne demande pas de trouver les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$).

2) Vérifier que $g(x) \geq 1 - e^{-1}$ pour tout réel x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $f(x) = x + 2 + xe^{-x+1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation $y = x + 2$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$.

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (C) par rapport à (d).

c) Montrer que la droite (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3) a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty ; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

4) Tracer (d) et (C).

5) On considère la droite (D) d'équation $y = x + m$ où m est un paramètre réel.

Déterminer la valeur de m pour que (D) soit tangente à (C).

6) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations d'une fonction k définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-\infty$	e^{-2}	0

Trouver le domaine de définition de la fonction h donnée par $h(x) = \frac{1}{k(x) - g(x)}$.